Μάθημα 5ο

27/03/17

$\max\{2x_1 + x_2\}$ $\quad\quad$ $\max\{2x_1 + x_2\}$

$3x_1 + x_2 \leq 6$ $\quad\quad$ $3x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$x_1 - x_2 \leq 1$ $\quad\quad$ $x_1 - x_2 + x_4 = 1$

$x_1, x_2 \geq 0$ $\quad\quad$ $x_i \geq 0, \ i = 1,2,3,4$

Πίνακας και γράφημα για εξάσκηση σπίτι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.10 Βασιλείου

Δίνεται το παρακάτω τελικό tableau ενός π.γ.π. στο οποίο οι μεταβλητές x_4, x_5, x_6 και x_7 είναι περιθώριες.

			2	4	6	0	0	0	0	
B	C_B	B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ
P_6	0	8	0	0	2	4	-2	1	0	8/2
– P_2	4	6	0	1	$\boxed{2}$	2	-1	0	0	6/2
P_1	2	4	1	0	-1	1	2	0	0	–
P_7	0	12	0	0	1	3	2	0	1	12/1
		32	0	0	0	10	0	0	0	

Μια φορά το P_3 στη βάση και μια φορά το P_5.

Στο P_2 βάζω P_3, στο P_1 το P_5.

Αν έχουμε παραπάνω από μια λύσεις, έχουμε άπειρες, τον κυρτό συνδυασμό.

$\underline{x_1} = (4, 6, 0, 0, 0, 8, 12)'$

$\underline{x_2} = (7, 0, 3, 0, 0, 2, 9)'$

$\underline{x_3} = (0, 8, 0, 0, 2, 12, 8)$

$\lambda_1 \underline{x_1} + \lambda_2 \underline{x_2} + \lambda_3 \underline{x_3}$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \ 0 \leq \lambda_i \leq 1$

$z = 32$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

(Μ-Μέθοδος)

$\min 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$ $\qquad$ $-\max -2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$ $\qquad$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 60$ $\qquad$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 = 60$

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$ $\qquad$ $x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $\qquad$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Έπειτα:

$-\max -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - Mx_6 - Mx_7$, $M \gg 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ $\qquad$ x_6, x_7 τεχνητές μεταβλητές

$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 + x_6 = 60$

$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = 20$

$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 7$

στη συνέχεια με SIMPLEX

$A\underline{x} = \underline{b}$

$\tilde{A}\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{a} \end{pmatrix} = \underline{b}$, $\underline{x} \geq 0$, $\underline{a} \geq 0$

- Αν μια μεταβλητή τη βγάλω από τη βάση δεν συνεχίζω να κάνω υπολογισμούς γι' αυτή
- Αν εμφανιστεί τεχνητή μεταβλητή στη λύση τότε το πρόβλημα είναι αδύνατο, αν έχει τιμή μεγαλύτερη του μηδενός

(Μέθοδος των δύο φάσεων)

ΦΑΣΗ 1: $\min(x_6 + x_7) = -\max(-x_6 - x_7)$

Προκύπτει αντικειμενική συνάρτηση $0 = z$, το οποίο σημαίνει ότι στη λύση δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές

ΦΑΣΗ 2: Κρατώ τη λύση και επιστρέφω στους αντικειμενικούς συντελεστές του αρχικού προβλήματος, κάτω από τους περιορισμούς.

$-\max(-2x_1+3x_2+4x_3)$

$\frac{1}{5}x_1 + \quad + x_4 + \frac{3}{5}x_5 = 2$

$\frac{1}{5}x_1 + x_2 + \quad - \frac{2}{5}x_5 = 12$

$\frac{3}{5}x_1 + \quad + x_3 \quad - \frac{1}{5}x_5 = 16$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$

Προκύπτει $Z = \frac{320}{3}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Η εταιρεία υπολογιστών BEST επιθυμεί να προγραμματίσει την εβδομαδιαία παραγωγή της για τα επιτραπέζια και φορητά μοντέλα προσωπικών υπολογιστών που συναρμολογεί. Για την εβδομάδα που έρχεται η εταιρεία είναι έτοιμη να διαθέσει 150 ώρες εργασίας, χώρο 300 τ.μ. και τις 20 οθόνες φορητών υπολογιστών που έχει στην αποθήκη. Ένας γρήγορος υπολογισμός έδειξε ότι κάθε επιτραπέζιος υπολογιστής χρειάζεται 3 ώρες συναρμολόγησης και χώρο 8 τ.μ. ενώ κάθε φορητός 5 ώρες συναρμολόγησης και χώρο 5 τ.μ.

1) Αν το κέρδος από κάθε επιτραπέζιο υπολογιστή ανέρχεται στις 50 χ.μ και από κάθε φορητό στις 40 χ.μ βρείτε την καλύτερη γραμμή παραγωγής.

2) Υποθέστε ότι η εταιρεία για να καλύψει τα έξοδα της πρέπει να συναρμολογήσει τουλάχιστον 25 υπολογιστές. Ποιά είναι η καλύτερη γραμμή παραγωγής;

3) Υποθέστε ότι η εταιρεία για να καλύψει τα έξοδα της πρέπει να συναρμολογήσει τουλάχιστον 50 υπολογιστές. Ποιά είναι η καλύτερη γραμμή παραγωγής;

4) Αν το κέρδος από κάθε επιτραπέζιο υπολογιστή ανέρχεται στις χ.μ και από κάθε φορητό στις 50 χ.μ. βρείτε την καλύτερη γραμμή παραγωγής.

ΛΥΣΗ:

$\max z = 50x_1 + 40x_2$

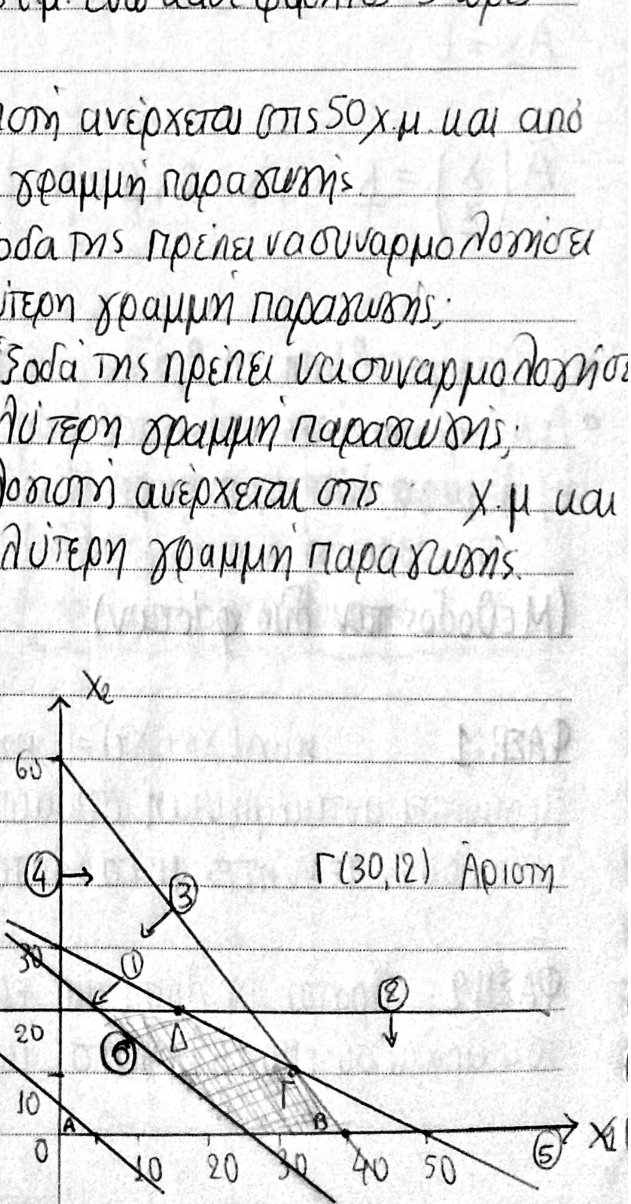
$3x_1 + 5x_2 \leq 150$ (ώρες εργασίας)

$x_2 \leq 20$ (οθόνη)

$8x_1 + 5x_2 \leq 300$ (χώρο εργασίας

$x_1, x_2 \geq 0.$

⑥ $(x_1 + x_2 \geq 25)$ (ελάχιστη παραγωγή)



$200 = 50x_1 + 40x_2$

Η τυπική μορφή το π.γ.π είναι:

$\max(50x_1+40x_2)$

$3x_1+5x_2+x_3 = 150$

$x_2 + x_4 = 20$

$8x_1+5x_2 + x_5 = 300$

$x_i \geq 0 \quad ,i=1,\dots,5.$

Καταλήγουμε σε αυτό το πίνακα:

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	40	12	0	1	8/25	0	-3/25
P_4	0	8	0	0	-8/25	1	3/25
P_1	50	30	1	0	-5/25	0	5/25
	z	1980	0	0	14/5	0	26/5

$\gamma_1'' = 8/25\,\gamma_1'$

$\gamma_2'' = \gamma_2' - \gamma_1''$

$\gamma_3'' = \gamma_3' - 5/8\,\gamma_1''$

$\gamma_4'' = \gamma_4 + 70/8\,\gamma_1''$

Για να επιλυθεί το πρόβλημα με Simpler θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τεχνητές μεταβλητές.

$\max(50x_1+40x_2-Mx_7)$

$3x_1+5x_2+x_3 = 150$

$x_2 + x_4 = 20$

$8x_1+5x_2 + x_5 = 300$

$x_1+x_2 - x_6 + x_7 = 25$

$x_i \geq 0, \ i=1,\dots,7$

Αν αντί για $x_1+x_2 \geq 25$ έχω $x_1+x_2 \geq 50$ τότε αδύνατο πρόβλημα.
Εφικτή περιοχή $= \emptyset$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

$\max 30x_1 + 50x_2$

$3x_1+5x_2 \leq 150$

$x_2 \leq 20$

$8x_1+5x_2 \leq 300$

$x_1, x_2 \geq 0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΘΕΜΑ):

B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
B	4	A_1	1	0	A_2	0
2	-1	-5	0	1	-1	0
3	A_3	-3	0	0	-4	1
10	C_1	C_2	0	0	0	0

Ποιές συνθήκες πρέπει να πληρούν οι άγνωστες παράμετροι $A_1, A_2, A_3, B, C_1, C_2$ έτσι ώστε:

1) η λύση είναι άριστη αλλά υπάρχουν και άλλες άριστες λύσεις;

2) η λύση δεν είναι μια βασική εφικτή λύση;

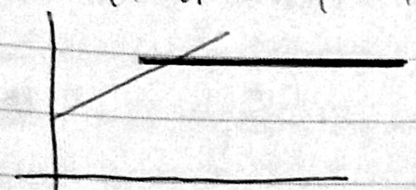
3) η λύση είναι μια βασική εφικτή λύση αλλά το π.γ.π. είναι μη φραγμένο;

ΛΥΣΗ:

2) Με B αρνητικό η λύση δεν είναι εφικτή.

3) Μη φραγμένο πρόβλημα προέρχεται από μη φραγμένη εφικτή περιοχή.

1) $B>0,\ C_2<0,\ A_1<0$



όλες οι λύσεις.

ΑΣΚΗΣΗ: Να συμπληρωθούν τα tableau.

ΛΥΣΗ:

			4	5/3	4/3	3	-1	0	-2/3
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	-1	4	0	4/3	2/3	0	1	0	-1/3
P_6	0	10	0	1/3	2/3	1	0	1	-1/3
P_1	4	4	1	1/3	1/6	1/2	0	0	1/6
	Z	12	0	-5/3	-4/3	-1	0	0	5/3

			-1	2	-6	0	0	5
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	2	2	-3	1	-1	-2	0	0
P_6	5	3	2	0	0	-1	0	1
P_5	0	1	6	0	7	6	1	0
	Z	19	5	0	4	-9	0	0

			1	2	3	-M
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	2	10	2	1	1	0
P_4	-M	20	0	0	3	1
		20-20M	3	0	-1+3M	0

Το πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση

			-1	3	0	0
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	0	0	2	1	1	0
P_4	0	5	1	2	0	1
		0	1	-3	0	0

Η λύση μου είναι και εκφυλισμένη

			8	-3	-2	6
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	-2	5	-3	0	1	2
P_2	-3	10	0	1	0	-2
		-40	-2	0	0	-M

			9	0	0	4
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	0	3	1	1	0	9
P_3	0	-5	-1	0	1	0
		0	-9	0	0	-4

Δεν είναι τελικό ταμπλό, μη εφικτή

			3	1	4	8
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	3	2	1	0	1	2
P_3	1	1	0	1	1	3
		7	0	0	0	1

Τελικό ταμπλό, και άλλη άριστη λύση, περισσότερα μηδενικά

δεν το πρόλαβα.

Τελικό ταμπλό, άριστη μοναδική λύση και εκφυλισμένη

ΔΥΪΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Κανονική μορφή:

i) πρόβλημα μεγιστοποίησης

ii) όλοι οι περιορισμοί είναι ανισώσεις με φορά $\leq$

iii) όλες οι μεταβλητές μη αρνητικές

$\max c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$w_1 \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$w_2 \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$

$\vdots$

$w_m \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

$\max \underline{c}'\underline{x}$ | (Π) πρωτεύον | $\min \underline{b}'\underline{w}$ (*)

$A\underline{x} \leq \underline{b}$ | | $A^T\underline{w} \geq \underline{c}$

$\underline{x} \geq \underline{0}$ | | $w \geq 0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

$$\begin{array}{l} \min 2x_1+3x_2-5x_3 \\ 7x_1-4x_2+x_3 \leq 6 \\ 2x_1-3x_2-4x_3 \geq 5 \\ x_1-x_2 = 10 \\ x_1\in\mathbb{R},\ x_2\geq 0,\ x_3\leq 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -\max -2x_1-3x_2+5x_3 \\ 7x_1-4x_2+x_3 \leq 6 \\ -2x_1+3x_2+4x_3 \leq -5 \\ x_1-x_2 = 10 \\ x_1\in\mathbb{R},\ x_2\geq 0,\ x_3\leq 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -\max -2x_1-3x_2+5x_3 \\ 7x_1-4x_2+x_3 \leq 6 \\ -2x_1+3x_2+4x_3 \leq -5 \\ x_1-x_2 \geq 10 \\ x_1-x_2 \leq 10 \\ x_1\in\mathbb{R},\ x_2\geq 0,\ x_3\leq 0 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -\max -2x_1+3x_2-5x_3 \\ 7x_1-4x_2+x_3 \leq 6 \\ -2x_1+3x_2+4x_3 \leq -5 \\ -x_1+x_2 \leq -10 \\ x_1-x_2 \leq 10 \\ x_1\in\mathbb{R},\ x_2\geq 0,\ x_3\leq 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -\max -2(x_1'-x_1'')-3x_2-5x_3' \\ 7(x_1'-x_1'')-4x_2-x_3' \leq 6 \\ -2(x_1'-x_1'')+3x_2-4x_3' \leq -5 \\ -(x_1'-x_1'')+x_2 \leq -10 \\ (x_1'-x_1'')-x_2 \leq 10 \\ x_1, x_1'', x_2, x_3' \geq 0. \end{array}$$

$$\circledast \quad \left.\begin{array}{l} \min b_1w_1+b_2w_2+\dots+b_mw_m \\ a_{11}w_1+a_{21}w_2+\dots+a_{m1}w_m \geq c_1 \\ a_{21}w_1+a_{22}w_2+\dots+a_{m2}w_m \geq c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+\dots+a_{mn}w_n \geq c_n \\ w_i \geq 0. \end{array}\right\} \text{Δυϊκό πρόβλημα.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

	(Π) (πρωτεύον)	(Δ) (Δυϊκό)
	$\max 10x_1+9x_2+4x_3+6x_4$	$\min 70w_1+60w_2+25w_3$
w_1	$3x_1+2x_2+4x_3+2x_4 \leq 70$	$3w_1+5w_2+5w_3 \geq 10$
w_2	$5x_1+5x_2+x_3+3x_4 \leq 60$	$2w_1+5w_2+6w_3 \geq 9$
w_3	$5x_1+6x_2+3x_3+x_4 \leq 25$	$4w_1+w_2+3w_3 \geq 4$
	$x_i \geq 0,\ i=1,2,3,4$	$2w_1+3w_2+w_3 \geq 6$
		$w_1, w_2, w_3 \geq 0.$

ΠΡΟΤΑΣΗ Ν.δ.ο. το δυϊκό του δυϊκού βγαίνει πρωτεύον.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} &\max \underline{c}'\underline{x} \\ &\quad A\underline{x} \leq \underline{b} \\ &\quad \underline{x} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} \min \underline{b}'\underline{w} & -\max -\underline{b}'\underline{w} & -\min -\underline{c}'\underline{x} & \max \underline{c}'\underline{x} \quad (\Pi) \\ A^T\underline{w} \geq \underline{c} \;\rightarrow & -A^T\underline{w} \leq -\underline{c} \;\overset{\Delta}{\Longrightarrow} & -(A^T)^T\underline{x} \geq -\underline{b} \;\rightarrow & A\underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{w} \geq 0 & \underline{w} \geq 0 & \underline{x} \geq 0 & \underline{x} \geq 0 \quad \blacksquare \end{array}$$